SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Alberto Parmeggiani

ESISTENZA E REGOLARITÀ C^∞ AL BORDO PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER OPERATORI SUB-ELLITTICI DI TIPO FEFFERMAN-PHONG

9 marzo 1995

Tecnoprint - Bologna 1994

Riassunto. Viene illustrata l'esistenza e regolarità fino al bordo delle soluzioni del problema di Dirichlet: $Lu = f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u_{|\partial\Omega} = g \in C^\infty(\partial\Omega)$, dove Ω è una aperto *regolare* di $\mathbf{R}^n$, e $L = -\sum_{ij} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\right) + c(x)$ un operatore del 2^0-ordine a coefficienti C^∞ soddisfacente alla cosiddetta *condizione di Fefferman-Phong*.

Abstract. The existence and C^∞-regularity up to the boundary of solutions to the Dirichlet problem: $Lu = f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u_{|\partial\Omega} = g \in C^\infty(\partial\Omega)$ is proved, where Ω is a smooth bounded open set of $\mathbf{R}^n$, and $L = -\sum_{i,j} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\right) + c(x)$ is a second-order degenerate elliptic operator with smooth coefficients, satisfying the so-called Fefferman-Phong's condition.

In questa occasione cercherò di mostrare l'effettiva validità della seguente "filosofia": *ciò che è vero per operatori di tipo Hörmander è sicuramente vero anche per operatori di tipo Fefferman-Phong.*

Per illustrarla mostrerò l'esistenza e regolarità C^∞ fino al bordo per le soluzioni del problema di Dirichlet per operatori sub-ellittici (si veda più sotto per gli enunciati precisi delle ipotesi e del risultato). Tutto ciò che mostrerò è essenzialmente elementare. Anche il teorema di regolarità non deve sorgere inaspettato (nell'ambito delle ipotesi che sotto farò). Tuttavia è il metodo usato che mostra una certa elasticità e (forse) applicabilità ad una varietà più generale di problemi. Tutti i dettagli sono contenuti nel lavoro scritto in collaborazione con J.C.Xu (si veda [PX]).

Introduzione

Ricordo allora per prima cosa che cos'è un operatore di tipo Hörmander e di tipo Fefferman-Phong. Sia M una varietà liscia di dimensione $n \geq 2$, e sia $\Omega \subset\subset M$ un sottoinsieme aperto, connesso con frontiera $\partial\Omega$ **regolare,** e giacente da una sola parte della sua frontiera (posso supporre Ω e M aperti di $\mathbf{R}^n$). Siano $X_1, \ldots, X_N$ campi vettoriali lisci (o a coefficienti di "ragionevole" regolarità) su M, tali che lo spazio generato dagli X_i, $i = 1, \ldots, N$ e i loro commutatori di lunghezza al più k, per un certo $k \in \mathbf{N}$,

$$[X_{i_1}, [\ldots, [X_{i_{L-1}}, X_{i_L}] \ldots]], \quad L \leq k, \; i_j \in \{1, \ldots, N\},$$

coincida in ogni punto $x \in \Omega$ con $\mathbf{R}^n$ (i.e. con $T_x\Omega$).
Allora, se X^* indica l'aggiunto formale del campo X, l'operatore L si dice essere *di tipo Hörmander* (secondo i nostri scopi) se

$$L = -\sum_{j=1}^{N} X_j^* X_j.$$

Si sa che se gli X_j sono lisci allora un tale operatore è *sub-ellittico* di ordine $2/(k+1)$ (si veda per esempio [P]). [1] Veniamo ora alla definizione di un operatore di tipo

[1] Ricordo che ciò vuol dire che esiste $C > 0$ tale che:

$$||u||_{2/(k+1)} \leq C\Big(||Lu|| + ||u||\Big), \; \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Fefferman-Phong. Per fare ciò devo ricordare il concetto di *palla sub-unitaria* e *distanza sub-unitaria* relativa ad un operatore L della forma:

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\partial_j + c(x),$$

dove la matrice simmetrica reale $A(x) = \Big(a_{ij}(x)\Big)_{i,j} \geq 0$, per ogni $x \in M$.
Dico che un vettore $v = (v_1, \cdots, v_n)$ è *subunitario* per L in x se

$$|\langle v, \xi\rangle|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$$

per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$. Se $L = -\sum_{j=1}^{N} X_j^* X_j$, con X_j campi vettoriali, allora $X_1, \cdots, X_N$ sono subunitari per L in ogni punto di M. In generale, siano

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\partial_k,\ j = 1, \cdots, n.$$

Poiché $\sum_{i,j=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq 0$ per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$, si ha che

$$\langle Y_j, \xi\rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_k\right)^2 \leq C \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x)\xi_k\xi_l,$$

per tutti gli $\xi \in \mathbf{R}^n$, dove

$$C = \max_{x\in\bar{\Omega}} \sum_{1\leq j\leq n} a_{jj}(x).$$

Ciò può essere visto molto rapidamente nel modo seguente: poiché $A(x)^2 = Q(x)\Lambda(x)^2\, {}^tQ(x)$, con $Q(x) \in O(n)$ e Λ diagonale, in ogni x vale

$$\sum_{j=1}^{n}\langle Y_j, \xi\rangle^2 = \langle A(x)^2\xi, \xi\rangle =$$

$$= \langle \Lambda(x)^2\, {}^tQ(x)\xi, {}^tQ(x)\xi\rangle \leq \Big(\mathrm{Tr}A(x)\Big)\langle \Lambda(x)\, {}^tQ(x)\xi, {}^tQ(x)\xi\rangle \leq C\langle A(x)\xi, \xi\rangle.$$

Allora i campi $\bar{Y}_j = (2C)^{-1/2}Y_j$, $j = 1, \cdots, n$ sono subunitari per L in M e perciò l'insieme dei campi subunitari per L non è vuoto. Dico che una curva $\gamma(t)$ è subunitaria per L se $\gamma : [0, b] \to M$ è una funzione Lipschitz e $\dot{\gamma}(t)$ è subunitario per L su $\gamma(t)$ q.d. in $t \in [0, b]$. La distanza d_L è perciò definita nel modo seguente:

$$d_L(x, y) = \inf\{b; \gamma \text{ è una curva subunitaria per } L, \gamma(0) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Denoto con $B_L(x,r) = \{y \in M, d_L(x,y) < r\}$ la palla di raggio r. La distanza euclidea ordinaria è $d_E(x,y)$. Finalmente posso dare la seguente definizione.

Definizione. *Un operatore L* **soddisfa la condizione di Fefferman-Phong** (FP) *su M se per ogni compatto $K \subset M$ esistono costanti $C > 0, \varepsilon > 0, \delta_0 > 0$ tali che, per tutti gli $x \in K, 0 < \delta \leq \delta_0$, si abbia:*

$$(FP) \qquad B_E(x,\delta) \subset B_L(x, C\delta^\varepsilon).$$

Nel caso di coefficienti C^∞ vale il seguente teorema (si veda [FP]):

Teorema. *L'operatore L soddisfa (FP) per qualche $\varepsilon > 0$ se e solo se per ogni $K \subset\subset M$ si può trovare $C > 0$ tale che*

$$\|u\|_\varepsilon^2 \leq C \left\{ \int \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i} u(x) \partial_{x_j} \bar{u}(x) dx + \|u\|_{L^2}^2 \right\}, \tag{1}$$

per ogni $u \in C_0^\infty(K)$.

Conseguenza di massima importanza di questo teorema sono l'ipoellitticità di L e le stime sulla sua soluzione fondamentale.
Considero ora il seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u\right) + c(x)u = f(x), & \text{in} \quad \Omega \\ u = g, & \text{su} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Il teorema che voglio illustrare (secondo la filosofia enunciata sopra) è allora il seguente (si noti che $\overline{\Omega}$ stesso è compatto):

Teorema. *Supponiamo che la matrice $(a_{ij})_{i,j} \in C^\infty(M, Sym(\mathbf{R}^n))$ sia semidefinita positiva su M, Ω sia come sopra, che $\partial\Omega$ sia* **noncaratteristico** *per L, $0 < c_0 \leq c(x) \in C^\infty$ e che l'operatore L soddisfi la condizione di Fefferman-Phong su M. Se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $g \in C^\infty(\partial\Omega)$, allora esiste unica $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ soluzione del problema di Dirichlet (2).*

Osservazione. *Come provato in [X1], in dimensione 2, e sotto ipotesi di regolarità C^2 della matrice $(a_{ij})_{ij}$, la condizione geometrica (FP) implica ancora la stima subellittica (1). Voglio anche far notare che nel medesimo lavoro [X1] si dà un controesempio al fatto che l'esponente ε in (FP) sia lo stesso che compare nella stima subellittica (sempre nel*

caso $n = 2$ e di coefficienti di classe C^2). In generale l'esponente della stima subellittica è strettamente minore di quello che compare in (FP).

La traccia della strategia usata è la seguente: dapprima si vede (è conseguenza immediata del lavoro di J.M.Bony [B]) che vale un "principio del massimo forte", valido anche sotto una ipotesi di tipo (FP) più debole (si veda anche [C] per l'uso del principio del massimo per operatori di tipo Hörmander a coefficienti poco regolari). Ciò implicherà in seguito l'unicità . Si definisce poi un opportuno spazio (definito tramite campi vettoriali subunitari per l'operatore) nei quali si trova una soluzione (usando una formulazione variazionale) del problema di Dirichlet. Si usano poi stime "tangenziali" per mostrare che la soluzione è regolare fino alla frontiera. (Si veda [FSS] per proprietà notevoli di spazi di Sobolev definiti tramite campi vettoriali.)

Voglio infine ricordare che una strategia basata sull'esistenza di opportuni campi subunitari è già presente nel lavoro di E.Lanconelli e B.Franchi [FL] per provare una disuguaglianza di Harnack per operatori degeneri. In seguito D.Jerison e A.Sanchez-Calle hanno usato una tale strategia per dimostrare una disuguaglianza di Poincaré per operatori subellittici a simbolo nonnegativo sulle palle subunitarie dell'operatore.

Un ultimo commento: il pregio di una strategia di questo tipo è di essere flessibile, anche se (per ora) presenta l'inconveniente che gli spazi usati sono troppo generali per permettere una costruzione della soluzione "incollando" varie soluzioni locali (si può infatti provare una disuguaglianza di Poincaré locale sotto le ipotesi più deboli di coefficienti di classe C^2 e quindi provare l'esistenza locale di soluzioni anche nel caso in cui $c(x) \geq 0$).

Principio del Massimo Forte per L.

Tutto ciò che sto per dire è conseguenza di una ipotesi di tipo (FP) più debole che chiamerò (wFP). Seguendo il lavoro di Bony [B] si può ottenere un principio del massimo debole e forte per l'operatore L. Inoltre tutto ciò è ottenibile sotto ipotesi più deboli sui coefficienti:

$$a_{ij}, c \in C^2(M), \ c(x) \geq 0.$$

La condizione di Fefferman-Phong-debole (wFP) è la seguente:
$\forall K \subset\subset M, \exists N = N(K) \in \mathbf{N}, \exists x_1, \ldots, x_N \in K, \exists 0 < \delta_1, \ldots, \delta_N < +\infty$ tali che

$$(wFP) \qquad K \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_L(x_j, \delta_j).$$

Si ha subito (si veda [B]):

Proposizione. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che u ha un massimo locale in $x^0 \in \Omega$, con $u(x^0) \geq 0$. Allora $Lu(x^0) \geq 0$. Inoltre, se $u(x^0) > 0$ e $c(x^0) > 0$, allora $Lu(x^0) > 0$.*

È elementare vedere che sotto l'ipotesi (wFP) ogni coppia di punti di $\overline{\Omega}$ può essere congiunta da un cammino subunitario in $\overline{\Omega}$:

Lemma. *$\forall x, y \in \overline{\Omega}$, esiste γ: $[0,T] \longrightarrow \overline{\Omega}$, con $\gamma(0) = x$, $\gamma(T) = y$, e γ subunitario per L.*

Sia ora F un chiuso di Ω, e X un campo vettoriale Lipschitz *tangente a F.* [2] Bony ha provato che le curve integrali di X che incontrano F in un punto devono essere completamente contenute in F ([B], Teorema 2.1.).
Da ([B], Proposizione 3.1) e dalla definizione di campo subunitario segue la seguente

Proposizione. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Lu \leq 0$. Supponiamo che esista $x^0 \in \Omega$ tale che $0 \leq u(x^0) = \sup_{x\in\Omega} u(x) < +\infty$. Sia $F = \{x \in \Omega;\ u(x) = u(x^0)\}$. Allora per ogni X, campo vettoriale subunitario per L, X è tangente a F. Si ha perciò che $\forall\gamma$, curva subunitaria per L, passante per un punto di F, $\gamma([a,b]) \subset F$.*

Allora, poiché ogni coppia di punti di $\overline{\Omega}$ può essere congiunta da una curva subunitaria per L, si ha il seguente principio forte del massimo:

Proposizione. *Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Lu \leq 0$. Se esiste $x^0 \in \Omega$ tale che $0 \leq u(x^0) = \sup_{x\in\Omega} u(x) < +\infty$, allora $u \equiv u(x^0)$ on Ω.*
Di conseguenza, se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, e $Lu = 0$, allora u assume massimo e minimo su $\partial\Omega$:

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u, \quad \forall x \in \Omega,$$

a meno che u non sia identicamente costante.

---

[2] Ricordo che ciò vuol dire (si veda [B]) la cosa seguente: si parte dal definire un vettore normale a F in un punto $x^0 \in F$. Un vettore ν si dice *normale* a F nel punto x^0 se esiste una palla aperta contenuta in $\Omega \setminus F$, centrata in un punto x_1 tale che x^0 appartenga alla chiusura di quest'ultima e $\nu = \lambda(x_1 - x^0)$, per $\lambda > 0$. Un campo vettoriale $X(x)$ si dirà allora *tangente* a F in x^0 se $X(x^0)$ è ortogonale a ν, per ogni ν, vettore normale a F in x^0.

Esistenza di soluzioni deboli.

Scrivo l'operatore L nella forma seguente: $L = L_0 + c(x)$. Anche in questa parte assumerò ipotesi più deboli sui coefficienti:

$$a_{ij},\ c \in C^2(M),\ c(x) \geq c_0 > 0.$$

Definisco la forma bilineare seguente:

$$a_L(\varphi, \psi) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\varphi(x)\partial_j\bar{\psi}(x)dx + \int_\Omega c(x)\varphi(x)\bar{\psi}(x)dx \sim$$

$$\sim a_{L_0}(\varphi, \psi) + < \varphi, \psi >_{L^2},\ \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Chiaramente $a_L(\cdot,\cdot)^{1/2}$ è una norma su $C_0^\infty(\Omega)$.

Prendo ora l'insieme $\mathcal{S}(\Omega) = \{X_j;\ j = 1, \ldots, N\}$, costituito da un numero finito di campi subunitari (per L), globalmente definiti e a coefficienti Lipschitziani su $\overline{\Omega}$. Definisco quindi

$$H_L^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega);\ \exists Xu \in L^2(\Omega), \forall X \in \mathcal{S}(\Omega)\},$$

dove $Xu \in L^2(\Omega)$ significa che esiste $w \in L^2(\Omega)$ tale che

$$< w, \varphi > = < u, X^*\varphi > (= < u, -X\varphi > + < u, (\mathrm{div}X)\varphi >), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Faccio notare che $\mathrm{div}X \in L^\infty(\Omega)$. Su $H_L^1(\Omega)$ la norma naturale è

$$||u||^2_{H_L^1} := \sum_{X \in \mathcal{S}(\Omega)} ||Xu||^2_{L^2} + ||u||^2_{L^2},$$

indotta la prodotto scalare

$$< u, v >_{H_L^1} := \sum_{X \in \mathcal{S}(\Omega)} < Xu, Xv >_{L^2} + < u, v >_{L^2}.$$

Sia

$$H_{0,L}^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\ \|_{H_L^1}}.$$

Si ha:

Lemma. *$H_L^1(\Omega)$ e $H_{0,L}^1(\Omega)$ sono spazi di Hilbert.*

La prova è classica.

Definisco ora ciò che intendo per *soluzione debole.*

Definizione. *Dico che $u \in H^1_{0,L}(\Omega)$ è una "soluzione debole" del problema (2) con condizioni alla frontiera $g = 0$ e termine noto $f \in L^2(\Omega)$, se $u \in H^1_{0,L}(\Omega)$ è soluzione di*

$$(L_0 + c(x))u = f \ \ in \ \ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dico che $u \in H^1_L(\Omega)$ è una "soluzione debole" del problema (2) con condizione alla frontiera $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$, e termine noto $f \in L^2(\Omega)$ se, indicando con $\tilde{g} \in H^2(\Omega)$ una funzione tale che $\tilde{g}_{|\partial\Omega} = g$, $u \in H^1_L(\Omega)$ è soluzione di [3]

$$(L_0 + c(x))u = f \ \ in \ \ \mathcal{D}'(\Omega), \quad u - \tilde{g} \in H^1_{0,L}(\Omega).$$

Posso allora provare l'esistenza di una soluzione debole nello spazio $H^1_{0,L}(\Omega)$. Sia $f \in L^2(\Omega)$, e $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Si ha che il funzionale seguente $J(v)$ si stima dal basso:

$$J(v) := a_L(v,v) - < f, v >_{L^2} \geq c_0\|v\|^2_{L^2} - < f, v >_{L^2} \geq \frac{1}{2}c_0\|v\|^2_{L^2} - \frac{1}{2c_0}\|f\|^2_{L^2}. \quad (3)$$

Da (3) segue perciò che

$$\inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)} J(\varphi) > -\infty.$$

Considero allora una successione minimizzante $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tale che

$$J(\varphi_n) \geq J(\varphi_{n+1}) \geq \ldots \longrightarrow \inf_{v \in C_0^\infty(\Omega)} J(v).$$

Poiché $(C_0^\infty(\Omega), a(\cdot,\cdot)^{1/2})$ è incluso in modo continuo in $H^1_{0,L}(\Omega)$, e poiché vale (3), si può trovare $C > 0$ tale che $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|\varphi_n\|_{H^1_L} \leq C$. Esiste quindi $u \in H^1_{0,L}(\Omega)$ tale che (per una sottosuccessione che chiamo ancora $\{\varphi_n\}$)

$$\varphi_n \overset{w-H^1_L}{\longrightarrow} u,$$

[3] Si noti che se a_{ij}, $c \in C^2(M)$ e $u \in L^2(\Omega)$, allora $Lu = f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ha senso nel modo seguente:

$$< u, L\varphi >_{L^2} = < f, \varphi >_{L^2}, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

da cui

$$< \varphi_n, L\psi >_{L^2} - < f, \psi >_{L^2} \longrightarrow < u, L\psi >_{L^2} - < f, \psi >_{L^2}, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Come usuale allora deve essere, $\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$J'(u)\psi := < u, L\bar{\psi} >_{\mathcal{D}'} - < f, \bar{\psi} >_{\mathcal{D}'} = < u, L\psi >_{L^2} - < f, \psi >_{L^2} = 0.$$

Ciò prova la seguente

Proposizione. *Esiste $u \in H^1_{0,L}(\Omega)$ che è soluzione del problema:*

$$\begin{cases} (L_0 + c(x))u = f \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H^1_{0,L}(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{4}$$

Per concludere l'esistenza di una soluzione debole prendo $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$. La suriettività dell'operatore "traccia" negli spazi di Sobolev su aperti regolari dà l'esistenza di $\tilde{g} \in H^2(\Omega)$ tale che $\tilde{g}_{|\partial\Omega} = g$. Sia $\phi := (L_0 + c(x))\tilde{g}$, e sia $v \in H^1_{0,L}(\Omega)$ una soluzione debole in $H^1_{0,L}(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} (L_0 + c(x))v = f - \phi \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ v \in H^1_{0,L}(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{5}$$

Allora $u = v + \tilde{g} \in H^1_L(\Omega)$ è una soluzione debole del problema:

$$\begin{cases} (L_0 + c(x))u = f - \phi + \phi = f \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H^1_L(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{6}$$

Finalmente:

Proposizione. *Esiste $u \in H^1_L(\Omega)$, soluzione debole del problema:*

$$\begin{cases} (L_0 + c(x))u = f \quad in \quad \mathcal{D}'(\Omega), \\ g \in H^{3/2}(\partial\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{7}$$

L'unicità è data dal Principio del Massimo:

Corollario. *Supponiamo che la soluzione u del problema (7), con $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$, sia tale che $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Allora si ha dal Principio Forte del Massimo per l'operatore L che u è unica.*

Regolarità della soluzione.

Per studiare la regolarità C^∞ fino al bordo di una soluzione debole del problema assumerò d'ora in poi che i coefficienti di L siano C^∞. Jerison e Sánchez-Calle (si veda [JS]) hanno provato che in tal caso vale:

Lemma. *Si considerino gli operatori $Y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i}$, $j = 1, \cdots, n$. Se l'operatore L soddisfa la condizione (FP), allora esiste un intero k per il quale i campi vettoriali $Y_1, \cdots, Y_n$ e i loro commutatori fino all'ordine k generano lo spazio tangente a M in ogni punto.*

Allora se definisco $H_L^1(\Omega)$ usando l'insieme $\mathcal{S}(\Omega) = \{Y_1, \cdots, Y_n\}$, la condizione (FP) implica che $H_L^1 \subset H^{\varepsilon_0}$ per un qualche $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$.

Traccia della prova del teorema. La stima subellittica (1) e il fatto che la matrice $A(x)$ sia semidefinita positiva danno (come in [OR]) l'ipoellitticità di L in Ω, i.e. $u \in C^\infty(\Omega)$. Passo allora alla regolarità di u fino alla frontiera di Ω.

Dapprima considero il caso in cui $u_{|\partial\Omega} = g = 0$. Sia $x^0 \in \partial\Omega$, e sia V_{x^0} un intorno di x^0 in M. Dal momento che la frontiera $\partial\Omega$ è noncaratteristica per L, usando un cambiamento di coordinate C^∞ in V_{x^0}, trasferisco (localmente) il problema (2), con condizione al bordo $= 0$, al problema seguente:

$$\begin{cases} \tilde{L}u = -\partial_{x_n}^2 u - \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{a}_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_j(x)\partial_j + \tilde{c}(x)u = \tilde{f}(x), & \text{in } \mathbf{R}_+^n; \\ u = 0, & \text{su } \mathbf{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

Qui $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_j$, $\tilde{c}$, $\tilde{f} \in C^\infty(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$, e $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_j, \tilde{c}$ sono a valori reali. In questo caso si ha che $Y_j = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{a}_{ij}(x)\partial_{x_i}$, $j = 1, \cdots, n-1$; $Y_n = \partial_{x_n}$ e questi soddisfano ancora la condizione di Hörmander. Si definisce, per $s, s' \in \mathbf{R}$,

$$H^{s,s'}(\mathbf{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n);\ (1 + |\xi|^2)^{s/2}(1 + |\xi'|^2)^{s'/2}\hat{u} \in L^2(\mathbf{R}^n)\},$$

dove $\xi = (\xi', \xi_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Lo spazio *tangenziale* $H^{s,s'}(\bar{\mathbf{R}}_+^n)$ è allora costituito dalle restrizioni a $\bar{\mathbf{R}}_+^n$ degli elementi di $H^{s,s'}(\mathbf{R}^n)$. Si ha la seguente stima subellittica tangenziale:

Lemma. *Per ogni compatto K di $\bar{\mathbf{R}}_+^n$, esistono costanti $C > 0$ e $\tilde{\varepsilon} > 0$ tali che*

$$\|u\|_{0,\tilde{\varepsilon}}^2 \leq C\{|(\tilde{L}u, u)| + \|u\|_{L^2}^2\}, \tag{9}$$

per ogni $u \in E = \{u \in C^\infty(\bar{\mathbf{R}}^n_+);\ supp u \subset K,\ u|_{x_n=0} = 0\}$.

Prova. Poiché la matrice $(\tilde{a}_{ij}(x))_{i,j}$ è semidefinita positiva, si ha, come in [OR] e [XZ], che

$$\|\partial_{x_n} u\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j u\|^2_{L^2} \leq C\left\{|(\tilde{L}u,\, u)| + \|u\|^2_{L^2}\right\}, \tag{10}$$

per ogni $u \in E$. Si usa ora la stima subellittica tangenziale di Derridj ([D]) per l'operatore di tipo Hörmander $H = -(\partial_n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} Y_j^* Y_j)$, i.e. per ogni compatto K di $\bar{\mathbf{R}}^n_+$, esistono $C > 0$ e $\tilde{\varepsilon} > 0$ tali che

$$\|u\|^2_{0,\tilde{\varepsilon}} \leq C\{\|\partial_{x_n} u\|^2_{L^2} + \sum_{j=1}^{n-1} \|Y_j u\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{L^2}\}, \tag{11}$$

per tutte le $u \in E = \{u \in C^\infty(\bar{\mathbf{R}}^n_+);\ \mathrm{supp} u \subset K,\ u|_{x_n=0} = 0\}$. Ciò prova il lemma.

Come conseguenza si ha che $Lu = f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u_{|\partial\Omega} = 0$, implica $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Si conclude la prova nel caso generale (e cioè nel caso in cui il dato al bordo $g \not\equiv 0$) prendendo $\tilde{g} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tale che $\tilde{g}_{|\partial\Omega} = g \in C^\infty(\partial\Omega)$, e v una soluzione del problema $Lv = f - L\tilde{g}$, $v_{|\partial\Omega} = 0$. Allora $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$, e $u = v + \tilde{g}$ risolve $Lu = f$, $u_{|\partial\Omega} = g$. Perciò $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e dal principio del massimo segue che u è unica. Ciò conclude la dimostrazione della regolarità .

Concludo dicendo che si può usare il teorema di regolarità per provare (secondo [X3]) esistenza e regolarità $C^\infty(\overline{\Omega})$ per le soluzioni del problema:

$$\begin{cases} Lu = f(x,\, u), & \text{in} \quad \Omega \\ u = g, & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{12}$$

dove $g \in C^\infty(\partial\Omega)$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbf{R})$ e $\partial_u f(x, u) \leq 0$.

Bibliografia.

[B] J.M.Bony, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérées* , Ann. Inst. Fourier 19, 1969.

[C] G.Citti, *A comparison theorem for the Levi equation*, Rend. Mat. Acc. Lincei s. 9, V.4, 1993.

[D] M.Derridj, *Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs du second ordre hypoelliptiques*, Ann. Inst. Fourier 21, 1971.

[FP] C.Fefferman, D.H.Phong, *Subelliptic eigenvalue problems*, Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis, in honor of A. Zygmund, Wadsworth Math. Series, 1981.

[FL] B.Franchi, E.Lanconelli, *Une condition géométrique pour l'inégalité de Harnack*, Jour. Math. pures et appl. 64, 1985.

[FSS] B.Franchi, R.Serapioni, F.Serra Cassano, *Meyers-Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, preprint, 1995.

[JS] D.Jerison, A.Sánchez-Calle, *Subelliptic second order differential operators*, Lecture Notes in Math. 1277, 1987.

[OR] O.Oleinik, E.Radkevic, *Second order equations with non negative characteristic form*, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1973,

[P] A.Parmeggiani, *Microlocalizzazioni Sub-Unitarie di Operatori Pseudodifferenziali*, Seminario di Analisi Matematica dell'Università di Bologna, A.A. 1992-93, Tecnoprint Bologna, 1993.

[PX] A.Parmeggiani, J.C.Xu, *The Dirichlet Problem for Sub-Elliptic Second Order Equations*, preprint, Università di Bologna, 1994.

[X1] C.J.Xu, *Operateurs sous-elliptiques et regularité des solutions d'equations aux derivees partielles non lineaires du second ordre en deux variables*, Comm. in P.D.E., 11, 1986.

[X2] C.J.Xu, *Regularity for quasilinear second order subelliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., 1992.

[X3] C.J.Xu, *The Dirichlet problem for a class of semilinear subelliptic equations*, preprint, 1994.

[XZ] C.J.Xu, C.Zuily, *Smoothness up to the boundary for solutions of the nonlinear and nonelliptic Dirichlet problem*, Trans. Amer. Math. Soc., 308, 1988.